Сумматорные рациональные операторы типа Фейера на единичной окружности

Н. В. Гриб (Минск, Беларусь)

Рациональные операторы типа Фейера, построенные В.Н. Русаком [2], нашли применение как в теории рациональной аппроксимации с фиксированными полюсами, так и со свободными полюсами. Эти операторы являются интегральными и своим происхождением восходят к рациональным рядам Фурье. Первые исследования по интерполяционным рациональным операторам в пространстве $C(R)$ были выполнены Е.А. Ровбой [1]. В настоящей работе вводятся сумматорные рациональные операторы типа Фейера в пространстве $C(L)$, исследуется их сходимость к функциям из $C_{2\pi}$.

Для заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n, 0 \le |\alpha_k| < 1$ соответствующее произведение Бляшке имеет вид

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}.$$

Если точку z повернуть вдоль единичной окружности на угол 2π, то $\arg \pi_n^3(z)$ изменится на $6\pi n$, непрерывно возрастая. Поэтому уравнение $\pi_n^3(z)-1=0$ имеет $3n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}, j = \overline{1,3n}$, расположенных на окружности $|z| = 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \tag{1}$$

$$\rho_n(z) = z\sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha}_k z)(z-\alpha_k)},$$

$$K_n(z,\xi) = \left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2\right)\frac{z\xi}{(z-\xi)^2}.$$

Лемма 1. Если $z = e^{iu}$, $\xi = e^{iv}$, то справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(v)-\Phi_n(u))}{\sin^2 \frac{v-u}{2}}dv = \oint_{|\xi|=1} K_n(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi} = 2\pi\rho_n(z). \tag{2}$$

В пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций введем сумматорный рациональный оператор типа Фейера

$$F_{2n-2}(z,f) = \frac{1}{3\rho_n(z)}\sum_{j=1}^{3n} \frac{K_n(z,z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j). \tag{3}$$

Непосредственно проверяется, что F_{2n-2} — положительный оператор, значениями которго являются рациональные функции степени не выше $2n-2$.

Можно получить другое представление оператора $F_{2n-2}(z,f)$. Из (1) следует

$$e^{i\Phi_n(u)} = \pi_n(e^{iu}).$$

Продифференцируем обе части по u

$$ie^{i\Phi_n(u)}\Phi'_n(u) = \pi'_n(e^{iu})ie^{iu}$$

Учитывая то, что

$$\pi'_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \pi_n(z)\frac{1-\overline{\alpha}_k z}{z-\alpha_k}\left(\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\right)' = \pi_n(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha}_k z)(z-\alpha_k)} = \frac{\pi_n(z)\rho_n(z)}{z}, \tag{4}$$

получим

$$\Phi'_n(u) = \frac{\pi'_n(e^{iu})e^{iu}}{\pi_n(e^{iu})} = \rho_n(e^{iu}). \tag{5}$$

При $z = e^{iu},\ z_j = e^{iu_j}$ из (2), (3) и (5) будем иметь

$$F_{2n-2}(u,f) = \frac{1}{3\Phi'_n(u)}\sum_{j=1}^{3n}\frac{f(e^{iu_j})}{\Phi'_n(u_j)}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^2\frac{u-u_j}{2}},$$

или, если $f(e^{iu}) = \varphi(u)$

$$F_{2n-2}(u,\varphi) = \frac{1}{3\Phi'_n(u)}\sum_{j=1}^{3n}\frac{\varphi(u)}{\Phi'_n(u_j)}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^2\frac{u-u_j}{2}}. \tag{6}$$

Лемма 2. Оператор $F_{2n-2}(u,f)$ является точным на константах.

Доказательство. Не ограничивая общности, докажем точность оператора $F_{2n-2}(u,f)$ для $f(u) = 1$, то есть покажем, что

$$\frac{1}{3\rho_n(z)}\sum_{j=1}^{3n}\frac{K_n(z,z_j)}{\rho_n(z_j)} \equiv 1.$$

Для этого вычислим контурный интеграл

$$J(z) = \frac{1}{4\pi\rho_n(z)}\oint\limits_{\gamma}\frac{K_n(z,\xi)q(\xi)d\xi}{\xi}, \qquad q(\xi) = i\frac{\pi_n^3(\xi)+1}{\pi_n^3(\xi)-1},$$

где γ - замкнутый контур, окружающий точки $\left\{\alpha_k, \frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right\}$, а точки $\{z_j\}_{j=1}^{3n}$ находятся во внешности γ. Считаем для определённости, что все α_k различны. Для начала найдем значения функции $q(\xi)$ в точках α_k и $1/\bar{\alpha}_k$. Так как

$$q(\xi) = i\frac{\pi_n^3(\xi)+1}{\pi_n^3(\xi)-1} = i\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)^3 + \prod\limits_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha}_k\xi)^3}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)^3 - \prod\limits_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha}_k\xi)^3},$$

поэтому $q(\alpha_k) = -i$, $q\left(1/\overline{\alpha}_k\right) = i$. Применив теорему о вычетах для внутренней области и лемму 1, получим

$$J(z) = \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname*{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n(z,\xi)q(\xi)}{\xi} + \operatorname*{Res}_{1/\overline{\alpha_k}} \frac{K_n(z,\xi)q(\xi)}{\xi} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{\xi\to\alpha_k} \frac{K_n(z,\xi)q(\xi)(\xi-\alpha_k)}{\xi} + \lim_{\xi\to 1/\overline{\alpha_k}} \frac{K_n(z,\xi)q(\xi)(\xi-1/\overline{\alpha_k})}{\xi} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^{n} \left(-i \operatorname*{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n(z,\xi)}{\xi} + i \operatorname*{Res}_{1/\overline{\alpha_k}} \frac{K_n(z,\xi)}{\xi} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname*{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n(z,\xi)}{i\xi} - \operatorname*{Res}_{1/\overline{\alpha_k}} \frac{K_n(z,\xi)}{i\xi} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho_n(z)} \left(\oint\limits_{|\xi|=1} K_n(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi} + \oint\limits_{|\xi|=1} K_n(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi} \right) = \frac{1}{2\pi\rho_n(z)} \oint\limits_{|\xi|=1} K_n(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi} \equiv 1.$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $\{z_j\}_{j=1}^{3n}$, а на бесконечности — нуль второго порядка, поэтому при вычислении интеграла по внешности контура γ будем иметь

$$J(z) = \frac{-2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \left(\operatorname*{Res}_{z_j} \frac{K_n(z,\xi)q(\xi)}{\xi} + \operatorname*{Res}_{\infty} \frac{K_n(z,\xi)q(\xi)}{\xi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \operatorname*{Res}_{z_j} \frac{K_n(z,\xi)(\pi_n^3(\xi)+1)}{\xi(\pi_n^3(\xi)-1)} = \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \lim_{\xi\to z_j} \frac{K_n(z,\xi)(\pi_n^3(\xi)+1)}{\xi(\pi_n^3(\xi)-1)'} =$$

$$= \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \lim_{\xi\to z_j} \frac{K_n(z,\xi)(\pi_n^3(\xi)+1)}{3\xi\pi_n^2(\xi)\pi_n'(\xi)} = \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} K_n(z,z_j) \lim_{\xi\to z_j} \frac{\pi_n^3(\xi)+1}{3\pi_n^3(\xi)\rho_n(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{3\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{K_n(z,z_j)}{\rho_n(z_j)}.$$

Лемма доказана.

Обозначим $\alpha^{(n)} = (-1)^n \prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^3$, $c_\alpha^{(n)} = \frac{1-\left|\alpha^{(n)}\right|^2}{1+\left|\alpha^{(n)}\right|^2 - 2\operatorname{Re}\alpha^{(n)}}$. Тогда имеет место

Лемма 3. Выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\rho_n(z_j)} = 3c_\alpha^{(n)},$$

и, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (1-|\alpha_k|) = \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_\alpha^{(n)} = 1.$$

Доказательство. Обозначим $\psi(z) = (\pi_n^3(z) - 1)^{-1}$ и рассмотрим интеграл

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2} \frac{\psi(z)dz}{z}.$$

Подынтегральная функция в круге имеет простые полюсы в нуле и в точках $\{z_j\}_j^{3n}$. Значит, в согласии с (4)

$$J(z) = \operatorname*{Res}_0 \frac{1}{z(\pi_n^3(z)-1)} + \sum_{j=1}^{3n} \operatorname*{Res}_{z_j} \frac{1}{z(\pi_n^3(z)-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\pi_n^3(z)-1} + \sum_{j=1}^{3n} \lim_{z\to z_j} \frac{1}{3z\pi_n^2(z)\pi_n'(z)}$$

С другой стороны, подынтегральная функция аналитична во внешности $|z| = 2$, поэтому из интегральной формулы Коши для бесконечной области следует, что

$$J(z) = \psi(\infty) = \frac{1}{\pi_n^3(\infty) - 1}.$$

Так как $\pi_n^3(0) = \prod\limits_{k=1}^{n} -\alpha_k^3 = \alpha^{(n)}$, $\pi_n^3(\infty) = \prod\limits_{k=1}^{n} -1/\overline{\alpha}_k^3 = -1/\overline{\alpha^{(n)}}$, получим

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\rho_n(z_j)} = 3\left(\frac{1}{\pi_n^3(\infty)-1} - \frac{1}{\pi_n^3(0)-1}\right) = 3\left(\frac{1}{1/\overline{\alpha^{(n)}}-1} - \frac{1}{\alpha^{(n)}-1}\right) =$$

$$3\left(-\frac{1}{\alpha^{(n)}-1} - \frac{\overline{\alpha^{(n)}}}{\overline{\alpha^{(n)}}-1}\right) = 3\frac{1-\left|\alpha^{(n)}\right|^2}{1+\left|\alpha^{(n)}\right|^2 - 2\operatorname{Re}\alpha^{(n)}}.$$

Если обозначить $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1 - |\alpha_k|)$, то, очевидно, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k| = n - \gamma_n$. Но среднее геометрическое чисел не превышает среднего арифметического

$$\left(\prod_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|,$$

поэтому

$$\prod_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right)^n = \left(1 - \frac{\gamma_n}{n}\right)^n.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n/n = 0$, то

$$\left(1 - \frac{\gamma_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\gamma_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\gamma_n}(-\gamma_n)} \sim e^{-\gamma_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

В противном случае $\frac{\gamma_n}{n} > d > 0$, где d не зависит от n , и тогда

$$\left(1 - \frac{\gamma_n}{n}\right)^n \leqslant (1-d)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} -\alpha_k^3 = 0$, и заканчивает доказательство соотношение

$$\lim_{n\to\infty} c_\alpha^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left|\alpha^{(n)}\right|^2}{1 + \left|\alpha^{(n)}\right|^2 - 2\operatorname{Re}\alpha^{(n)}} = 1.$$

Теорема 1. Если $\varphi(u) \in C_{2\pi}$, то имеет место неравенство

$$|F_{2n-2}(u,\varphi) - \varphi(u)| \leqslant \left(1 + \pi\sqrt{c_\alpha^{(n)}}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi_n'(u)}}\right),$$

где $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности функции $\varphi(u)$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\delta_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_n'(u)}}, \quad E = \left\{j | j = \overline{1..3n}, |u - u_j| < \delta_n(u)\right\}, \quad CE = \{1, 2, ..3n\} \backslash E.$$

Тогда с учетом определения модуля непрерывности для уклонения функции $\varphi(u)$ от оператора $F_{2n-2}(u,\varphi)$ будем иметь

$$\begin{aligned} |F_{2n-2}(u,\varphi) - \varphi(u)| &= \left| \tfrac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j=1}^{3n} \tfrac{\varphi(u_j) - \varphi(u)}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| \tfrac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j\in E} \tfrac{\omega(|u-u_j|)}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right| + \\ &\left| \tfrac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j\in CE} \tfrac{\omega(|u-u_j|)}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right| = S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Воспользовавшись неравенством

$$\omega\left(|u - u_j|\right) \leqslant \omega(\delta_n(u)) \left(|u - u_j| \, \delta_n^{-1}(u) + 1\right),$$

получим

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &\leqslant \tfrac{\omega(\delta_n(u))}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j\in E} \tfrac{1}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} + \\ &+ \tfrac{\omega(\delta_n(u))}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j\in CE} \tfrac{1}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} + \\ &+ \tfrac{\omega(\delta_n(u))}{3\delta_n(u)\Phi_n'(u)} \sum_{j\in CE} \tfrac{|u-u_j|}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} = \\ &= \omega(\delta_n(u)) \left(1 + \tfrac{1}{3\sqrt{\Phi_n'(u)}} \sum_{j\in CE} \tfrac{|u-u_j|}{\Phi_n'(u_j)} \tfrac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right) \leqslant \\ &\leqslant \omega(\delta_n(u)) \left(1 + \tfrac{\pi}{3\sqrt{\Phi_n'(u)}} \sum_{j\in CE} \tfrac{\left|\sin \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))\right|}{\Phi_n'(u_j)\left|\sin \frac{u-u_j}{2}\right|} \right) = \omega(\delta_n(u)) \left(1 + S_3\right). \end{aligned} \tag{8}$$

К сумме S_3 применим неравенство Коши-Буняковского и лемму 3

$$S_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{\Phi_n'(u)}} \sum_{j\in CE} \frac{1}{\sqrt{\Phi_n'(u_j)}} \left(\frac{1}{\sqrt{\Phi_n'(u_j)}} \frac{\sin \frac{1}{2}|\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)|}{\sin \frac{\left|u-u_j\right|}{2}} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{\Phi_n'(u)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\Phi_n'(u_j)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}}} =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{3c_\alpha^{(n)}} = \pi \sqrt{c_\alpha^{(n)}},$$

что в совокупности с (7) и (8) заканчивает доказательство теоремы.

Следствие. Если $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (1-|\alpha_k|) = \infty$, то последовательность рациональных функций $F_{2n-2}(u,\varphi)$ равномерно сходится к функции $\varphi(u)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Это следствие вытекает из оценки

$$\Phi_n'(u) = e^{iu} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha}_k e^{iu})(e^{iu}-\alpha_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1+|\alpha_k|^2 - 2|\alpha_k|\cos(u-\arg\alpha_k)} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1+|\alpha_k|)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|}{1+|\alpha_k|} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (1-|\alpha_k|) \overset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Оценка в теореме 1 может быть улучшена, если наложить на числа $\{\alpha_k\}_1^n$ некоторые дополнительные ограничения. Пусть, например, числа $\{\alpha_k\}_1^n$ не имеют предельных точек на окружности $|z| = 1$, т. е. выполняется условие

$$1-|\alpha_k| \geqslant d > 0, \ k = \overline{1,n},$$

где d не зависит от k.

Без доказательства приведем следующие теоремы.

Теорема 2. Если $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ и числа $\{\alpha_k\}_1^n$ не имеют предельных точек на единичной окружности, то имеет место неравенство

$$|F_{2n-2}(u,\varphi) - \varphi(u)| \leqslant \left(1 + \frac{24\pi}{d^3}\right) \omega\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Теорема 3. Если $\varphi(u) \in Lip_M\alpha$ и числа $\{\alpha_k\}_1^n$ не имеют предельных точек на единичной окружности, то имеет место неравенство

$$|F_{2n-2}(u,\varphi) - \varphi(u)| < \begin{cases} \frac{24\pi M}{d^3} \frac{\ln n}{n}, & \alpha = 1 \\ \frac{8\pi M}{d^{4-\alpha}} \left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) \frac{1}{n^\alpha}, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Литература.

1. *Ровба Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.

2. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Мн.: Выш. шк., 1979.